



基于 Rao 检验的信号统计分辨界分析

孙闽红, 刘艳芳, 钟华, 包建荣

(杭州电子科技大学通信工程学院, 浙江 杭州 310018)

摘要: 针对基于广义似然比检验 (GLRT) 的信号统计分辨界 (SRL) 分析存在计算较复杂、难以得到检测统计量解析表达式等问题, 提出了一种基于 Rao 检测的 SRL 分析方法。分析了噪声方差已知和未知两种情形下的信号一维方位角 SRL 以及噪声方差已知时的信号二维方位角及俯仰角 SRL, 推导得到了 Rao 检测统计量以及对应 SRL 所需的最小信噪比 (SNR), 分析了检测性能、计算复杂度, 并与 GLRT 方法进行了对比。仿真实验验证了 Rao 检测方法的有效性。

关键词: 统计分辨界; 统计检测; 参数估计; Rao 检验; 广义似然比检验

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2017113

Analysis of statistical resolution limit based on Rao test

SUN Minhong, LIU Yanfang, ZHONG Hua, BAO Jianrong

School of Communication Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China

Abstract: Since the approach of analyzing statistical resolution limit (SRL) based on generalized likelihood ratio test (GLRT) has the problems of high computational complexity and isn't easy to get the analytical formula of the detection statistics, a method for the analysis of the SRL based on Rao test was proposed. The unidimensional SRL of azimuth under the cases of known and unknown noise variance, two-dimensional SRL of azimuth and elevation under the case of known noise variance were analyzed. The Rao test detection statistic and the minimum SNR required for the corresponding SRL were derived, the detection performance and the computational complexity of the Rao test were analyzed and compared with the GLRT method. Simulation results verify the validity of the Rao test.

Key words: statistical resolution limit, statistical test, parameter estimation, Rao test, generalized likelihood ratio test

1 引言

在雷达、通信和声呐等领域, 接收机常需要分辨在距离、方位或速度等方面存在较小差异的不同信号, 这些差异本质上对应着时延、相位、

频率等信号参数上的差异。统计分辨界 (statistical resolution limit, SRL)^[1] 定义为正确分辨两个相邻信号源时兴趣参数之间的最小距离, 它是参数估计问题中量化性能的一个重要统计工具。分析信号的 SRL 可以为接收机正确分辨多个在某些信号

收稿日期: 2016-12-12; 修回日期: 2017-04-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61271214, No.61301248), 浙江省自然科学基金重点资助项目 (No.LZ14F010003)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61271214, No.61301248), Key Program of Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (No.LZ14F010003)

参数上非常接近的信号源提供理论依据,具有广泛的应用,如通信接收机,以期望的检测概率检测出两个方位角很接近的用户时,SRL可以给出此时需要达到的信噪比。

现有的分析信号SRL的方法可归纳为以下3类。

(1) 基于平均零谱的方法^[2,3]

假设两个信号由频率 f_1 和 f_2 参数化,Cox准则^[2]表明如果在每个频率 f_1 和 f_2 的平均零谱小于在中值 $(f_1+f_2)/2$ 处的平均零谱,则这两个相邻信号可以被分辨。Sharman准则^[3]则指出如果在中值 $(f_1+f_2)/2$ 处的平均零谱的二阶导数是负数,则这两个相邻信号可以被分辨。很明显,基于平均零谱的SRL与特定的高分辨算法相关。

(2) 基于独立于估计算法的估计精度准则方法^[4-8]

该类方法常用克拉美罗界(CRB)来分析信号的SRL。Lee准则^[4]得到的结论是:假设兴趣参数是频率 f ,如果两个相邻信号的频率的最大标准偏差 $\max(\sqrt{CRB(f_1)}, \sqrt{CRB(f_2)})$ 小于两个频率差值 $|f_1 - f_2|$ 的2倍,即 $\max(\sqrt{CRB(f_1)}, \sqrt{CRB(f_2)}) < 2|f_1 - f_2|$,则这两个信号是可以被分辨的。Lee准则的缺点是没有考虑信号兴趣参数之间的耦合。为了弥补Lee准则的缺陷,Smith准则^[5]指出:如果两个信号的频率差值 $|f_1 - f_2|$ 大于频率差值的标准偏差 $\sqrt{CRB(|f_1 - f_2|)}$,那么这两个相邻信号是可以被分辨的。

(3) 基于统计检测理论的方法^[9,10]

其主要思想是利用二元假设检验来判断观测信号中是存在一个信号还是两个信号。该类方法面临的挑战是在给定信噪比的情况下,如何把两个信号源兴趣参数之间的最小距离(例如频率之间的差值)与虚警概率 P_{fa} 和检测概率 P_d 联系起来。基于检测理论研究信号统计分辨界的方法主要有广义似然比检测(generalized

likelihood ratio test, GLRT)和贝叶斯检验。其中基于统计检测理论的方法得到更多的关注,原因在于它不像零谱与特定算法相关,因此适合所有的高分辨算法,且由于它与参数的CRB是否存在无关,因而也不像基于CRB的方法应用范围受到局限。

在基于统计检测的SRL研究中,由于GLRT不需要兴趣参数的任何先验条件,且在由于分辨界未知而无法利用奈曼—皮尔逊准则设计最优检测器的情况下可以较好地解决该问题,GLRT成为分析SRL的主要方法。然而,GLRT方法仍然存在一些不足。对于二元假设检验问题,GLRT统计量的计算需要先求出两种假设下未知参数的极大似然估计(maximum likelihood estimate, MLE),其计算比较复杂而且计算量较大^[11-16],如参考文献[12]在给定信噪比的情况下利用GLRT辨别观测信号中是否包含两个信号源,由于推导过程中需要计算频率、振幅和相位等多个未知参数在二元假设条件下的MLE,导致GLRT统计量的计算比较复杂且计算量较大。类似地,参考文献[17]基于GLRT和CRB分别研究了谐波模型的多维统计分辨界并给出了基于这两种方法得到的SRL之间的联系,同样由于需要计算两种假设条件下兴趣参数和多余参数的MLE,使得GLRT统计量的计算过程较复杂。尤其在研究信号的多维统计分辨界^[17-20]时,如果噪声统计特性未知,未知参数较多,其MLE的推导将更加复杂,GLRT统计量的解析表达式也难以得到。

与GLRT相比,Rao检验的优势体现在:它仅需要计算 H_0 假设下未知参数的MLE,因而可有效简化推导过程和降低计算复杂度,更容易得到检验统计量的解析解,且它与GLRT有着相同的渐近性能。因此,本文提出了基于Rao检验的SRL分析方法。假定信号源为确定信号,以信号角度参数为例,分析了基于Rao检验的两个相邻



信号的一维方位角分辨界和二维角（方位角与俯仰角）分辨界。首先分析噪声方差已知和未知情形下的信号一维方位角分辨界，然后进一步分析噪声方差已知情形下的信号二维角分辨界。

2 信号一维方位角分辨界

2.1 信号模型

考虑 N 元线阵中的两个源信号，待分辨兴趣参数是这两个源信号到达阵列时的波达角（direction of arrive, DOA）。假设这两个源信号为确定性远场窄带信号，用 $\mathbf{s}_1 = [s_1(1), \dots, s_1(L)]^T$ 和 $\mathbf{s}_2 = [s_2(1), \dots, s_2(L)]^T$ 表示，其中 L 是快拍数目。每个信号源的 DOA 用 θ_m ($m=1,2$) 表示。令 $\omega_m = (2\pi \sin \theta_m) / \lambda$ 表示第 m 个信源的兴趣参数，其中 λ 表示信号波长，导向矢量为：

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega_m) = [\exp(j\omega_m d_1), \dots, \exp(j\omega_m d_N)]^T \quad (1)$$

其中， d_n 表示第 n 个传感器与第 1 个传感器之间的距离。第 l 个快拍下阵列接收信号为：

$$\mathbf{y}(l) = \boldsymbol{\alpha}(\omega_1) s_1(l) + \boldsymbol{\alpha}(\omega_2) s_2(l) + \mathbf{n}(l) \quad (2)$$

其中， $\mathbf{y}(l)$ 是 N 维接收信号， $y_n(l)$ 是它的第 n 个元素。假设向量 $\mathbf{n}(l)$ 是均值为 0、方差为 $\sigma^2 \mathbf{I}_N$ 的加性高斯白噪声。在 L 个快拍下，阵列的接收信号由式 (3) 给出：

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}_1 \otimes \boldsymbol{\alpha}(\omega_1) + \mathbf{s}_2 \otimes \boldsymbol{\alpha}(\omega_2) + \mathbf{n} \quad (3)$$

其中， $\otimes$ 表示 Kronecker（克罗内克）积， $\mathbf{y} = [\mathbf{y}^T(1), \dots, \mathbf{y}^T(L)]^T$ ， $\mathbf{n} = [\mathbf{n}^T(1), \dots, \mathbf{n}^T(L)]^T$ 。

SRL 的问题可以看作一个二元假设检验问题，可写为：

$$\begin{cases} H_0: \delta = 0 \\ H_1: \delta \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中， $\delta = \omega_2 - \omega_1$ 表示兴趣参数之间的距离，它也等价于波达角之间的差异 $\theta_2 - \theta_1$ 。假设 H_0 表示两个信号源不能被分辨， H_1 表示两个信号源可以被分辨。为了简化计算过程，这里假设 $\omega_2 > \omega_1$ 。

由于 δ 很小，可以利用一阶泰勒展开式在

$\omega_c = (\omega_1 + \omega_2) / 2$ 处展开 $\boldsymbol{\alpha}(\omega_1)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}(\omega_2)$ ，有：

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega_1) \stackrel{1}{=} \boldsymbol{\alpha}(\omega_c) - \frac{\delta}{2} \dot{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_c) \text{ and } \boldsymbol{\alpha}(\omega_2) \stackrel{1}{=} \boldsymbol{\alpha}(\omega_c) + \frac{\delta}{2} \dot{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_c) \quad (5)$$

其中符号 $\stackrel{1}{=}$ 表示一阶近似， $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_c) = \left. \frac{d\boldsymbol{\alpha}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c}$ 。利用这一近似结果，可得式 (3) 的

线性近似为：

$$\mathbf{y} = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \otimes \boldsymbol{\alpha}(\omega_c) + \frac{\delta}{2} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \otimes \dot{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_c) + \mathbf{n} \quad (6)$$

定义新观测统计量 $\mathbf{z} = \mathbf{y} - (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \otimes \boldsymbol{\alpha}(\omega_c)$ ，二元假设检验问题 (4) 可等价为：

$$\begin{cases} H_0: \mathbf{z} = \mathbf{n} \sim CN(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \\ H_1: \mathbf{z} = \frac{\delta}{2} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) \otimes \dot{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_c) + \mathbf{n} \sim CN(\mathbf{w}\delta, \sigma^2 \mathbf{I}) \end{cases} \quad (7)$$

其中， $\mathbf{I}$ 是单位矩阵， $\mathbf{w} = (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) \otimes \dot{\boldsymbol{\alpha}}(\omega_c) / 2$ 。

2.2 SRL 分析

以下根据噪声方差是否已知分两种情形讨论。

(1) 噪声方差已知

根据统计检测理论可知，Rao 检验的检测统计量为：

$$T_{\text{Rao}}(\mathbf{z}) = \left. \frac{\partial \ln p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0}^T \left[\mathbf{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0) \right]_{\delta_{H_0} \delta_{H_0}} \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \ln p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \delta} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0} \begin{matrix} H_1 \\ > \\ H_0 \end{matrix} \eta$$

其中， $\boldsymbol{\theta}$ 为未知参数向量，这里只有一个未知参数，即 $\boldsymbol{\theta} = \delta$ ； $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0$ 为未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 在 H_0 假设下的值，这里有 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0 = 0$ ； η 表示检测阈值； $p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta})$ 是随机向量 $\mathbf{z}$ 的概率密度函数（probability density function, PDF）； $\mathbf{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0)$ 是 Fisher 信息矩阵 $\mathbf{I}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0)$ 的逆矩阵； δ_{H_0} 是在 H_0 假设下 δ 的取值，即 $\delta_{H_0} = 0$ 。

首先计算 Fisher 信息矩阵，它是一个一维矩阵 $\mathbf{I}(\delta)$ ，经计算可得：

$$\mathbf{I}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0) = \mathbf{I}(\delta) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{z}; \delta)}{\partial \delta^2} \right] = E \left[\frac{2\|\mathbf{w}\|^2}{\sigma^2} \right] = \frac{2\|\mathbf{w}\|^2}{\sigma^2} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8),可得 Rao 检验的检测统计量 $T_{\text{Rao}}(\mathbf{z})$ 为:

$$T_{\text{Rao}}(\mathbf{z}) = \frac{2 \operatorname{Re}\{\mathbf{w}^H \mathbf{z}\}}{\|\mathbf{w}\|^2 \sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \eta \quad (10)$$

其中, $()^H$ 表示共轭转置, $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ 是求复数的实数部分的运算。与参考文献[11]中 GLRT 的检测统计相比,两者完全相同。

Rao 检测具有与 GLRT 相同的渐近性能,可等效为如下二元假设检验^[21]:

$$T(\mathbf{z}) \sim \begin{cases} \chi_1^2, & H_0 \text{ 假设} \\ \chi_1^2(\lambda(P_{\text{fa}}, P_{\text{d}})), & H_1 \text{ 假设} \end{cases} \quad (11)$$

其中, χ_1^2 和 $\chi_1^2(\lambda(P_{\text{fa}}, P_{\text{d}}))$ 分别表示自由度为 1 的中心卡方分布和非中心卡方分布的概率密度函数, P_{fa} 和 P_{d} 分别表示虚警概率和检测概率。非中心参数可表示为:

$$\lambda(P_{\text{fa}}, P_{\text{d}}) = (\delta - 0)^T \mathbf{I}(\delta)(\delta - 0) = \frac{2\delta^2 \|\mathbf{w}\|^2}{\sigma^2} \quad (12)$$

实际上,当给定 P_{fa} 时,可计算得到 P_{d} ,则非中心参数 $\lambda(P_{\text{fa}}, P_{\text{d}})$ 可以由等式 $Q_{\chi_1^2}^{-1}(P_{\text{fa}}) = Q_{\chi_1^2}^{-1}(P_{\text{fa}}, P_{\text{d}})$ 计算。

一旦计算出非中心参数 $\lambda(P_{\text{fa}}, P_{\text{d}})$, 分辨两个相邻信号所需的最小信噪比 SNR 即可表示为:

$$\text{SNR} = \lambda(P_{\text{fa}}, P_{\text{d}}) \frac{\|\mathbf{s}_1\|^2 + \|\mathbf{s}_2\|^2}{2\delta \|\mathbf{w}\|^2} \quad (13)$$

(2) 噪声方差未知

此时有两个未知参数,即未知参数向量 $\boldsymbol{\theta} = [\delta \ \sigma^2]^T$ 。首先要计算得到 H_0 假设下噪声方差的 MLE 为: $\hat{\sigma}_0^2 = \|\mathbf{z}\|^2 / NL$ 。Fisher 信息矩阵 $\mathbf{I}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0)$ 为 2×2 维,经计算有:

$$\mathbf{I}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0) = \begin{bmatrix} \frac{2\|\mathbf{w}\|^2}{\hat{\sigma}_0^2} & \frac{2 \operatorname{Re}\{\mathbf{w}^H \mathbf{z}\}}{\hat{\sigma}_0^4} \\ \frac{2 \operatorname{Re}\{\mathbf{w}^H \mathbf{z}\}}{\hat{\sigma}_0^4} & -\frac{NL}{2\hat{\sigma}_0^4} + \frac{2}{\hat{\sigma}_0^6} \|\mathbf{z}\|^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

其逆矩阵中元素为:

$$[\mathbf{I}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_0)]_{\delta H_0 \delta H_0} = \frac{4\hat{\sigma}_0^2 \|\mathbf{z}\|^2 - NL\hat{\sigma}_0^4}{8\|\mathbf{z}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - 2NL\hat{\sigma}_0^2 \|\mathbf{w}\|^2 - 8 \operatorname{Re}\{\mathbf{w}^H \mathbf{z}\}} \quad (15)$$

将式(15)与 $\hat{\sigma}_0^2 = \|\mathbf{z}\|^2 / NL$ 代入式(8),可得 Rao 检验的检测统计量为:

$$T_{\text{Rao}}(\mathbf{z}) = \frac{NL \operatorname{Re}\{\mathbf{w}^H \mathbf{z}\}}{\|\mathbf{z}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{w}^H \mathbf{z}\}} \quad (16)$$

该检测统计量的计算复杂度为 $O(3NL)$,其渐近分布与式(11)相同,经推导可得非中心参数 $\lambda(P_{\text{fa}}, P_{\text{d}})$ 为:

$$\lambda(P_{\text{fa}}, P_{\text{d}}) = \frac{2\delta^2}{\sigma^2} \left[\frac{4\|\mathbf{z}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - NL\sigma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - 4 \operatorname{Re}\{\mathbf{w}^H \mathbf{z}\}}{-\sigma^2 NL + 4\|\mathbf{z}\|^2} \right] \quad (17)$$

当噪声方差未知时,分辨两个相邻信号所需的最小信噪比 SNR 为:

$$\text{SNR} = \frac{\lambda NL (\|\mathbf{s}_1\|^2 + \|\mathbf{s}_2\|^2)}{2\lambda \|\mathbf{z}\|^2 + \delta^2 NL \|\mathbf{w}\|^2 - Q} \quad (18)$$

其中, $Q = \sqrt{(2\lambda \|\mathbf{z}\|^2 - \delta^2 NL \|\mathbf{w}\|^2)^2 + 8\lambda NL \delta^2 \operatorname{Re}\{\mathbf{w}^H \mathbf{z}\}}$ 。

为了与 GLRT 相比较,鉴于现有基于 GLRT 的 SRL 分析研究都假设噪声统计特性已知,这里给出噪声方差未知的 GLRT 统计量。首先计算两种假设下未知参数的 MLE:

$$\hat{\delta} = \frac{\operatorname{Re}\{\mathbf{w}^H \mathbf{z}\}}{\|\mathbf{w}\|^2}, \quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{w} \hat{\delta}_i\|^2}{NL} \quad (19)$$

其中, $\hat{\delta}$ 表示 δ 在 H_1 假设下的 MLE, $\hat{\sigma}_i^2 (i=0,1)$ 表示 σ^2 在两种假设下的 MLE。经理论推导可得 GLRT 的统计量为:

$$T_{\text{GLRT}}(\mathbf{z}) = NL \ln \|\mathbf{z}\|^2 - NL \ln \left\| \mathbf{z} - \mathbf{w} \frac{\operatorname{Re}\{\mathbf{w}^H \mathbf{z}\}}{\|\mathbf{w}\|^2} \right\|^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \eta \quad (20)$$

该检测统计量的计算复杂度为 $O(5NL)$ 。比较



噪声方差未知时的两种检测统计量, 可发现 GLRT 需要计算两种假设下未知参数的 MLE, 而 Rao 检验只需要计算 H_0 假设下未知参数的 MLE, 且 Rao 检验的检测统计量计算复杂度也比 GLRT 要低。

3 信号二维角 (方位角与俯仰角) 分辨界

3.1 信号模型

仍考虑线性阵列, 发射阵列和接收阵列分别具有 N_1 和 N_2 根天线。源信号的兴趣参数为 2 个, 即方位角 φ_m 和俯仰角 θ_m 。设观测模型为:

$$\begin{aligned} [y(t)]_{n_1, n_2} &= [x(t)]_{n_1, n_2} + [n(t)]_{n_1, n_2} \\ t &= 1, \dots, L, n_1 = 1, \dots, N_1, n_2 = 1, \dots, N_2 \end{aligned} \quad (21)$$

其中, $y(t)$ 、 $x(t)$ 和 $n(t)$ 分别表示在 t 快拍下有噪声观测量、无噪声观测量和噪声; L 表示快拍数目; $[y(t)]_{n_1, n_2}$ 表示由发射阵列的第 n_1 根天线发射并由接收阵列的第 n_2 根天线接收的信号; 假设 $n(t)$ 是均值为 0、方差为 $\sigma^2 \mathbf{I}$ 的加性复高斯白噪声, 并假设 σ^2 是已知的。无噪声观测向量为:

$$[x(t)]_{n_1, n_2} = \sum_{m=1}^2 s_m(t) \prod_{p=1}^2 e^{j\omega_m^{(p)} n_p} \quad (22)$$

其中, $\omega_m^{(1)} = -2\pi d_R \cos \varphi_m / \lambda$ 和 $\omega_m^{(2)} = -2\pi d_T \cos \theta_m / \lambda$ 是角频率, d_R 、 d_T 和 λ 分别表示接收和发射天线阵的阵元间距和信号波长。式 (22) 中, 假设 $s_m(t) = \alpha_m \exp(j\phi_m(t))$ ($m=1, 2$) 是两个确定性远场窄带信号源, 其中 $\alpha_m(t)$ 和 $\phi_m(t)$ 分别表示第 t 个快拍下第 m 个信号源的振幅和相位。由于:

$$\prod_{p=1}^2 e^{j\omega_m^{(p)} n_p} = [\alpha(\omega_m^{(1)}) \circ \alpha(\omega_m^{(2)})]_{n_1, n_2} \quad (23)$$

其中, “ $\circ$ ” 是 Hadamard (哈达玛) 积运算, $\alpha(\cdot)$ 是导向矢量, 且有 $\alpha(\omega_m^{(p)}) \triangleq [1, e^{j\omega_m^{(p)}}, \dots, e^{j\omega_m^{(p)}(N_p-1)}]^T$, $x(t)$ 服从平行因子 (parallel factor) 分解定理^[17], 可以写为:

$$x(t) = \sum_{m=1}^2 s_m(t) [\alpha(\omega_m^{(1)}) \circ \alpha(\omega_m^{(2)})] \quad (24)$$

有噪声观测量可表示为:

$$y = [\text{vec}^T(y(1)), \text{vec}^T(y(2)), \dots, \text{vec}^T(y(L))]^T = x + n \quad (25)$$

其中, $\text{vec}(\cdot)$ 表示向量化算子, 无噪声观测量为:

$$\begin{aligned} x &= [\text{vec}^T(x(1)), \text{vec}^T(x(2)), \dots, \text{vec}^T(x(L))]^T \\ &= \sum_{m=1}^2 s_m(t) \otimes \alpha(\omega_m^{(1)}) \otimes \alpha(\omega_m^{(2)}) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{vec}(x(t)) = \left[[x(t)]_{0,0}, \dots, [x(t)]_{N_1-1, N_2-1} \right]^T \quad (27)$$

二维 SRL 的分析可以建模为如下二元假设检验问题:

$$\begin{cases} H_0 : (\delta_1, \delta_2) = 0 \\ H_1 : (\delta_1, \delta_2) \neq 0 \end{cases} \quad (28)$$

其中, $\delta_p = \omega_2^{(p)} - \omega_1^{(p)}$ ($p=1, 2$) 表示兴趣参数之间的距离。 H_0 假设表示两个信号源存在但是不能被分辨, H_1 假设表示两个信号是可以被分辨的。为了简化计算, 假设 $\omega_2^{(1)} > \omega_1^{(1)}, \omega_2^{(2)} > \omega_1^{(2)}$ 。

由于检测问题式 (28) 没有与观测信号直接相关, 不易推导检测统计量, 因此需要利用近似方法得到信号模型式 (25) 的转换形式。首先定义中心参数为 $\omega_c^{(1)} = (\omega_1^{(1)} + \omega_2^{(1)})/2$ 和 $\omega_c^{(2)} = (\omega_1^{(2)} + \omega_2^{(2)})/2$ 。由于 δ_1 和 δ_2 都很小, 利用一阶泰勒展开式在 $\delta_1=0$ 和 $\delta_2=0$ 处展开式 $\alpha(\omega_m^{(p)})$, 可得:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega_1^{(1)}) &\approx \alpha(\omega_c^{(1)}) - \delta_1 \dot{\alpha}(\omega_c^{(1)}), \alpha(\omega_2^{(1)}) \approx \alpha(\omega_c^{(1)}) + \delta_1 \dot{\alpha}(\omega_c^{(1)}) \\ \alpha(\omega_1^{(2)}) &\approx \alpha(\omega_c^{(2)}) - \delta_2 \dot{\alpha}(\omega_c^{(2)}), \alpha(\omega_2^{(2)}) \approx \alpha(\omega_c^{(2)}) + \delta_2 \dot{\alpha}(\omega_c^{(2)}) \end{aligned} \quad (29)$$

其中, $\dot{\alpha}(\omega_c^{(m)}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(\omega_c^{(m)})}{\partial \omega_c^{(m)}}$ 。则式 (25) 的线性近似可写为:

$$y = \tilde{G} \tilde{\zeta} + n \quad (30)$$

其中, 矩阵 $\tilde{G}$ 定义为 $\tilde{G} = [\ell_1 \ \ell_2 \ \ell_3 \ \ell_4]$, $\tilde{G}$ 的 4 个分量分别是:

$$\begin{aligned}
\ell_1 &= (s_1 + s_2) \otimes \alpha(\omega_c^{(1)}) \otimes \alpha(\omega_c^{(2)}) \\
\ell_2 &= (s_2 - s_1) \otimes \alpha(\omega_c^{(1)}) \otimes \dot{\alpha}(\omega_c^{(2)}) \\
\ell_3 &= (s_2 - s_1) \otimes \dot{\alpha}(\omega_c^{(1)}) \otimes \alpha(\omega_c^{(2)}) \\
\ell_4 &= (s_1 + s_2) \otimes \dot{\alpha}(\omega_c^{(1)}) \otimes \dot{\alpha}(\omega_c^{(2)})
\end{aligned} \quad (31)$$

参数向量由 $\tilde{\zeta} = [1 \ \delta_1 \ \delta_2 \ \delta_1 \delta_2]^T$ 表示。由于 δ_1 和 δ_2 很小, $\tilde{\zeta}$ 中的元素 $\delta_1 \delta_2$ 可以忽略不计。最后得到式 (25) 的近似模型为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\tilde{\zeta} + \ell_1 + \mathbf{n} \quad (32)$$

其中, $\mathbf{G} = [\ell_3 \ \ell_2]$, $\tilde{\zeta} = [\delta_1 \ \delta_2]^T$ 。

定义一个新的观测量 $\mathbf{v} \triangleq \mathbf{y} - \ell_1$, 二元假设检验问题 (28) 可转化为:

$$\begin{cases} H_0: \mathbf{v} = \mathbf{n} \sim \text{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \\ H_1: \mathbf{v} = \mathbf{G}\tilde{\zeta} + \mathbf{n} \sim \text{CN}(\mathbf{G}\tilde{\zeta}, \sigma^2 \mathbf{I}) \end{cases} \quad (33)$$

3.2 SRL 分析

设 ξ_0 表示 H_0 假设下未知参数向量 ξ 的值, 经计算可得 Fisher 信息矩阵 $\mathbf{I}(\xi_0)$ 为:

$$\mathbf{I}(\xi_0) = \frac{2}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \|\ell_3\|^2 & \text{Re}\{\ell_3^H \ell_2\} \\ \text{Re}\{\ell_3^H \ell_2\} & \|\ell_2\|^2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

其逆矩阵为:

$$\mathbf{I}^{-1}(\xi_0) = \frac{\sigma^2}{2Q} \begin{bmatrix} \|\ell_2\|^2 & -\text{Re}\{\ell_3^H \ell_2\} \\ -\text{Re}\{\ell_3^H \ell_2\} & \|\ell_3\|^2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

其中, $Q = \|\ell_2\|^2 \|\ell_3\|^2 - (\text{Re}\{\ell_3^H \ell_2\})^2$ 。根据式 (8) 进一步推导可得 Rao 检测统计量为:

$$\begin{aligned} T_{\text{Rao}}(\mathbf{z}) &= \frac{2}{Q\sigma^2} [\text{Re}^2\{\mathbf{v}^H \ell_3\} \|\ell_2\|^2 + \text{Re}^2\{\mathbf{v}^H \ell_2\} \|\ell_3\|^2 - \\ &\quad 2\text{Re}\{\mathbf{v}^H \ell_2\} \text{Re}\{\mathbf{v}^H \ell_3\} \text{Re}\{\ell_3^H \ell_2\}] \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \eta \end{aligned} \quad (36)$$

其计算复杂度为 $O(5LN_1N_2)$ 。

二维 SRL 基于 GLRT 的统计量^[18]为:

$$T_{\text{GLRT}}(\mathbf{v}) = \ln \frac{p(\mathbf{v}|\hat{\xi}, H_1)}{p(\mathbf{v}|H_0)} = \frac{2\hat{\xi}^H \mathbf{G}^H \mathbf{G} \hat{\xi}}{\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \eta \quad (37)$$

其中, $\hat{\xi}$ 是未知参数向量的 MLE, 其计算复杂度为 $O(7LN_1N_2)$, 与 Rao 检测统计量式 (36) 相比, 其计算复杂度更高, 当 LN_1N_2 很大时, GLRT 统计量的计算复杂度要明显增加。

Rao 检验渐近等效于下面的二元假设检验:

$$T(\mathbf{z}) \sim \begin{cases} \chi_2^2, & H_0 \text{ 假设} \\ \chi_2^2(\lambda(P_{\text{fa}}, P_d)), & H_1 \text{ 假设} \end{cases} \quad (38)$$

其中, χ_2^2 和 $\chi_2^2(\lambda(P_{\text{fa}}, P_d))$ 分别表示自由度为 2 的中心卡方分布和非中心卡方分布。非中心参数为:

$$\lambda(P_{\text{fa}}, P_d) = \frac{2}{\sigma^2} (\|\ell_3\|^2 \delta_1^2 + \|\ell_2\|^2 \delta_2^2 + 2\delta_1 \delta_2 \text{Re}\{\ell_3^H \ell_2\}) \quad (39)$$

分辨两个相邻信号所需的最小信噪比 SNR 为:

$$\text{SNR} = \frac{\lambda \sum_{m=1}^2 \|s_m\|^2}{2(\|\ell_3\|^2 \delta_1^2 + \|\ell_2\|^2 \delta_2^2 + 2\delta_1 \delta_2 \text{Re}\{\ell_3^H \ell_2\})} \quad (40)$$

4 仿真实验与分析

4.1 一维方位角分辨界

仿真参数设置与参考文献[11]中相同, 设置如下: 假设两个确定性正弦信号源的中心频率是 150 MHz, 采样频率是 10 GHz, 快拍数目 $L=256$, 传感器数目 $N=9$, 相邻传感器之间的距离是半个波长, 第一个信号源的波达角度为 30° , 虚警概率为 0.01。

图 1 给出了噪声方差已知和未知情形下 SNR 与 SRL 之间的关系曲线。由图 1 可知, SNR 与 SRL 成反比关系, 随着 SRL 的增大, 所需分辨的最低 SNR 相应减小。另外, 噪声方差已知时分辨两个信号所需的最小 SNR 要远低于噪声方差未知时的最小 SNR。

图 2 给出了噪声方差未知时两种检验的检测概率与 SRL 之间的关系曲线。由图 2 可知, 当 δ 在 0.16~0.26 时, Rao 检验的检测概率比 GLRT 的检测概率平均高 2%。当 $\delta < 0.16$ 和 $\delta > 0.26$ 时, 两种检验方法具有基本相同的检测性能。

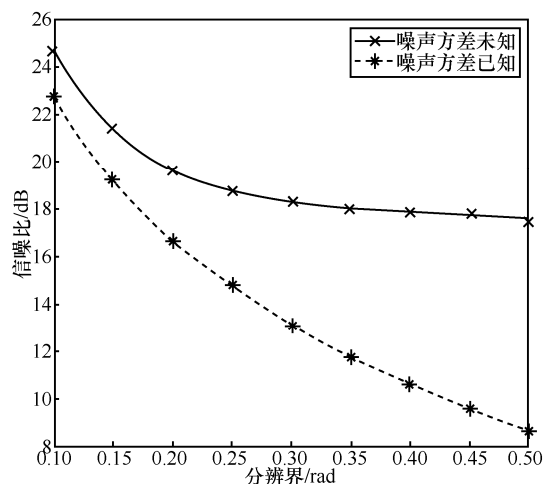


图1 噪声方差已知和未知情形下 SNR 与 SRL 之间的关系曲线

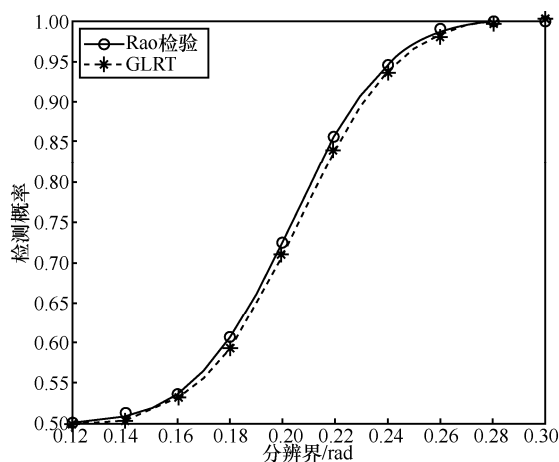


图2 噪声方差未知时两种检验的检测概率与 SRL 之间的关系

图3给出了噪声未知时两种检验的检测性能与 SNR 之间的关系曲线。由图3可知,当 $SNR < 18$ dB 和 $SNR > 23$ dB 时,两种假设检验的检测概率之间的差值很小。但当 SNR 在 18~23 dB 时, Rao 检验的检测概率比 GLRT 的检测概率平均高 2%,这表明在这种情形下 Rao 检验的检测性能要优于 GLRT 的检测性能。

4.2 二维角(方位角与俯仰角)分辨界

仍然参考文献[11],设置仿真参数如下:假设两个确定性正弦信号源的中心频率是 150 MHz,采样频率是 10 GHz,快拍数目 $L=256$,发射阵列和接收阵列的传感器数目 $N_1 = N_2 = 4$,相邻传感器之间的距离是半个波长,虚警概率为 0.01,第一个信号源的方位角为 30° ,俯仰角为 45° 。

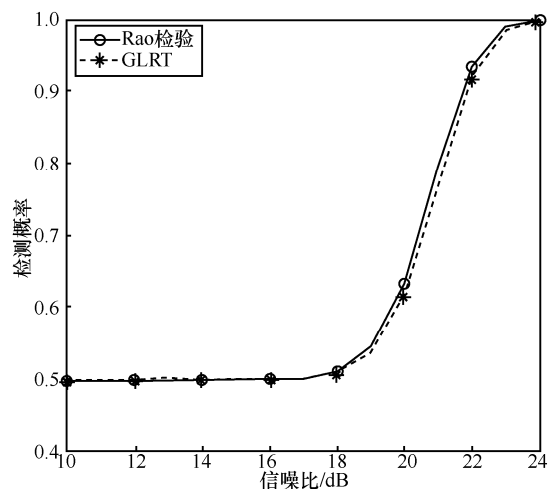


图3 噪声未知时两种检验的检测性能与 SNR 之间的关系

图4给出了渐近分布下 SNR 与未知参数 δ_1 的 SRL 之间的关系曲线。由图4可知, SNR 反比于 SRL。这表明 SNR 越高,分辨界越小,两个相邻信号越容易分辨。相同的结论同样适用于 δ_2 。

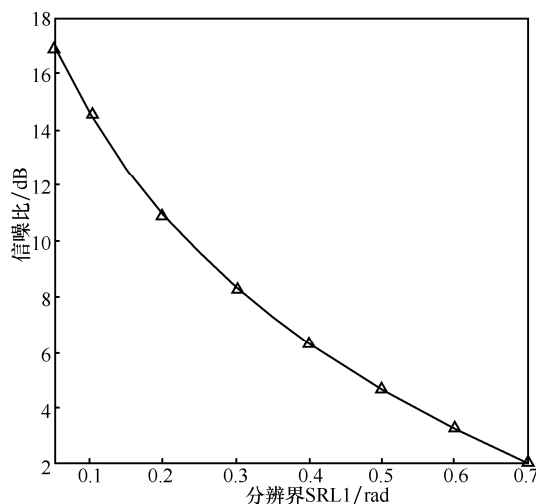
图4 渐近分布下 SNR 与未知参数 δ_1 的 SRL 之间的关系曲线

图5给出了两种检验方法的检测概率与 SNR 之间的关系曲线。由图5可知,当 $SNR < 14$ dB 和 $SNR > 24$ dB 时, Rao 检验的检测概率和 GLRT 的检测概率差别很小;当 SNR 在 14~24 dB 时, GLRT 的检测概率比 Rao 检验的检测概率平均大 3%。

图6给出了两种检验方法的检测概率与未知参数 δ_1 的 SRL 之间的关系曲线。由图6可知,当

$SRL < 0.09$ 和 $SRL > 0.33$ 时, Rao 检验的检测概率和 GLRT 的检测概率差别很小; 当 SRL 在 $0.09 \sim 0.33$ 时, GLRT 的检测概率比 Rao 检验的检测概率平均大 3%。

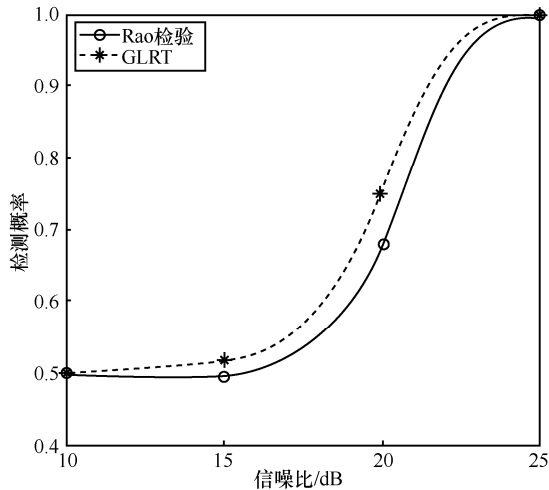


图5 两种检验方法的检测概率与 SNR 之间的关系曲线

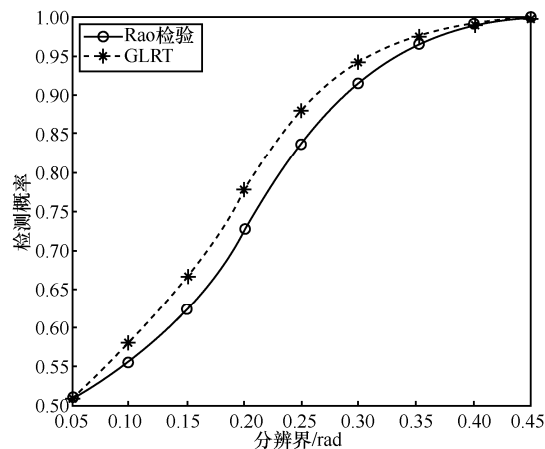


图6 两种检验方法的检测概率与未知参数 δ_1 的 SRL 之间的关系曲线

5 结束语

本文研究了基于 Rao 检验的一维和二维统计分辨界。经理论分析可知, 对于一维方位角统计分辨界, 在噪声方差已知时, Rao 检测统计量与 GLRT 完全相同, 因而两者具有相同的检测性能和计算复杂度; 在噪声方差未知时, Rao 检测统计量的计算复杂度比 GLRT 更低。对于二维角(方位角与俯仰角)统计分辨界, Rao 检测统计量的计算复杂度也

比 GLRT 更低。此外, 由于 Rao 检测只需要计算 H_0 假设下未知参数的 MLE, 因而更容易求得检测统计量的解析表达式。仿真结果表明, 对于噪声方差未知时的一维方位角统计分辨界, 当分辨界在 $0.16 \sim 0.26$ 、信噪比在 $18 \sim 23$ dB 时, Rao 检测性能要优于 GLRT; 而在其他范围, Rao 检测与 GLRT 的检测性能几乎一致。对于二维角(方位角与俯仰角)统计分辨界, 当分辨界在 $0.09 \sim 0.33$ 、信噪比在 $14 \sim 24$ dB 时, GLRT 的检测概率比 Rao 检验的检测概率平均高 3%; 而在其他范围, 两者检测性能基本一致。如果以损失 0.5 dB 的信噪比为代价, 则基于 Rao 检验的二维 SRL 可以达到与 GLRT 相同的性能, 但计算复杂度要更低。这些结果为接收机分辨多个在一个或两个信号参数非常接近的信号源提供了理论依据与参考。

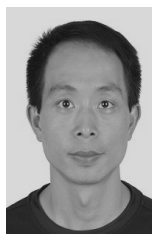
参考文献:

- [1] LIU Z, NEHORAI A. Statistical angular resolution limit for point sources[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(11): 5521-5527.
- [2] COX H. Resolving power and sensitivity to mismatch of optimum array processors[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1973, 54(3): 771-785.
- [3] SHARMAN K, DURRANI T. Resolving power of signal subspace methods for finite data lengths[C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech & Signal, April 26-29, 1985, Florida, USA. New Jersey: IEEE Press, 1985: 1501-1504.
- [4] LEE H B. The Cramer-Rao bound on frequency estimates of signals closely spaced in frequency (unconditional case)[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(6): 1569-1572.
- [5] SMITH S T. Statistical resolution limits and the complexified Cramer-Rao bound[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(5): 1597-1609.
- [6] DING-HONG L U, YANG L I, LIANG C J, et al. Statistical resolution limit for closely spaced targets based on Cramer-Rao bound[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2014.
- [7] BAO T, EL KORSO M N, OUSLIMANI H H. Cramér-Rao bound and statistical resolution limit investigation for near-field source localization[J]. Digital Signal Processing, 2016, 48(C): 137-147.
- [8] XIE N, GUO W, ZHANG L, et al. High resolution DOA estimation method in MIMO radar[J]. Wireless Personal Commu-



- nications, 2016, 91(1): 219-236.
- [9] SHAHRAM M, MILANFAR P. Statistical and information-theoretic analysis of resolution in imaging[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(8): 3411-3437.
- [10] ZHU W, TANG J, WAN S. Angular resolution limit of two closely-spaced point sources based on hypothesis testing[C]// IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, May 26-31, 2013, Vancouver, British Columbia, Canada. New Jersey: IEEE Press, 2013: 3905-3909.
- [11] EL KORSO M N, BOYER R, RENAUX A, et al. On the asymptotic resolvability of two point sources in known subspace interference using a GLRT-based framework[J]. Signal Processing, 2012, 92(10): 2471-2483.
- [12] SHAHRAM M, MILANFAR P. On the resolvability of sinusoids with nearby frequencies in the presence of noise[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(7): 2579-2588.
- [13] ZHU W, TANG J, WAN S. Angular resolution limit of two closely-spaced point sources based on information theoretic criteria[C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, May 4-9, 2014, Florence, Italy. New Jersey: IEEE Press, 2014: 86-90.
- [14] PRIBIC R, COUTINO M, LEUS G. Stochastic resolution analysis of co-prime arrays in radar[C]//IEEE Statistical Signal Processing Workshop, June 26-29, 2016, Palma de Mallorca, Spain. New Jersey: IEEE Press, 2016: 1-5.
- [15] PRIBIC R. Stochastic resolution analysis via a GLR test in radar[C]//International Workshop on Compressed Sensing Theory and ITS Applications To Radar, Sonar and Remote Sensing, September 16-22, 2016, Aachen, Germany. [S.l.:s.n.], 2016: 168-172.
- [16] GAO Y, LIAO G, LIU W. High-resolution radar detection in interference and nonhomogeneous noise[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016, 23(10): 1359-1363.
- [17] KORSO M N E, BOYER R, RENAUX A, et al. Statistical resolution limit for the multidimensional harmonic retrieval model: hypothesis test and Cramér-Rao bound approaches[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2011(1): 1-14.
- [18] ZHOU X, WANG H, CHENG Y, et al. Statistical spatial resolution limit for ultrawideband MIMO noise radar[C]//Statistical Signal Processing, June 29-July 2, 2014, Jupiters, Gold Coast, Australia. New Jersey: IEEE Press, 2014: 440-443.
- [19] KORSO M N E, BOYER R, RENAUX A, et al. A GLRT-based framework for the Multidimensional Statistical Resolution Limit[C]// IEEE Statistical Signal Processing Workshop, June 28-30, 2011, Nice, France. New Jersey: IEEE Press, 2011: 453-456.
- [20] EL KORSO M N, BOYER R, RENAUX A, et al. Statistical resolution limit for source localization with clutter interference in a MIMO radar context[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(2): 987-992.
- [21] KAY S M. Fundamentals of statistical signal processing: detection theory volume II[M]. London: Prentice-Hall PTR, 1998.

[作者简介]



孙闾红 (1974-), 男, 博士, 杭州电子科技大学通信工程学院副教授, 主要研究方向为雷达/通信信号处理、电子对抗。



刘艳芳 (1987-), 女, 杭州电子科技大学通信工程学院硕士生, 主要研究方向为信号处理。



钟华 (1978-), 男, 博士, 杭州电子科技大学通信工程学院讲师, 主要研究方向为通信/雷达信号处理、电子对抗等。



包建荣 (1978-), 男, 博士, 杭州电子科技大学通信工程学院副教授, 主要研究方向为空间通信及信号处理、无线协作通信等。